四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷五 上之上至下之下

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣戚世

欽定四庫全書

數學鑰卷五凡例

柘城杜知耕撰

凡例

一則

以此幾分之幾為彼幾分之幾之倍數即以彼幾分之幾為此幾分之幾之倍數兩數必相等設甲數十二乙為甲四分之三數九丙為甲三分之二數八以丙乘乙得七十二以乙乘丙亦得七十二更設丁數四

十八戊為丁四分之三數三十六己為丁三分之二數三十二以己乘乙得二百八十八以戊乘丙亦得二百八十八故曰兩數必相等

二則

設乙四倍之多于甲數為三七倍之多于甲數為十五以倍數四互乘十五得六十為二十八倍乙多于四倍甲之數以倍數七互乘三得二十一為二十八倍乙多于七倍甲之數兩數對減所餘必七倍甲多于四倍甲之數七倍甲多于四倍甲之數則三甲之數

也

三則

同名相減猶異名相加故異名相加者必同名相減同名相加猶異名相減故異名相減者必同名相加

四則

正與正負與負為同名正與負為異名

五則

有一數為法中之關鍵而乘除加減反不用者曰暗用數

數學鑰卷五凡例

數學鑰卷五上之上目録

柘城杜知耕撰

商功

卷五上之下

均輸

卷五下之下

方程

四則正負同異加減一法

五則正負同異加減二法

六則正負同異加減三法

七則正負同異加減四法

八則正負同異加減五法

九則四色方程

數學鑰卷五目録

數學鑰卷五上之上

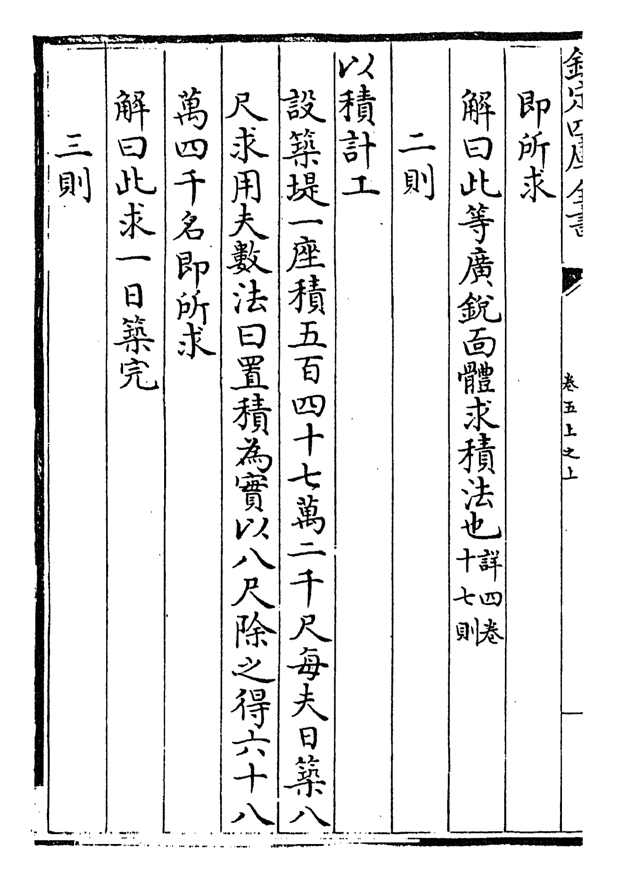
柘城杜知耕撰

商功

一則

修築計積

設修堤七千二百尺上濶八尺下濶三十尺高四十尺求積法曰並兩濶折半得一十九尺為實以高乘之得七百六十尺再以長七千二百尺乘之得五百四十七萬二千尺



即所求

解曰此等廣鋭面體求積法也詳四卷十七則

二則

以積計工

設築堤一座積五百四十七萬二千尺每夫日築八尺求用夫數法曰置積為實以八尺除之得六十八萬四千名即所求

解曰此求一日築完

三則

以工計日一法

設修堤同前欲一年築完求用夫數法曰置積為實以每夫日築八尺乘三百六十日（得二千八百八十尺）為法除之得一千九百名即所求

解曰二千八百八十尺乃一夫一年所築者故以之除實得夫數

四則

以工計日二法

設原議用夫一千九百名一年築完今欲速成增夫

九百五十名求用日數法曰以一千九百名乘三百六十日得六十八萬四千日為實並原夫增夫共二千八百五十名為法除之得二百四十日即所求

解曰六十八萬四千日乃一夫築完所用之日數故並原夫增夫除之得二千八百五十名所用之日數

五則

堅土壤土之較

設鑿池土築堤堤積五百四十七萬二千尺池長七千五百尺濶三十五尺求池深法曰置堤積四因三

歸得七百二十九萬六千尺為實以池濶乘長得二十六萬二千五百尺為法除之得二十七尺七寸九分四釐有奇即所求

解曰凡闕地四尺為壤五尺築堅三尺故于堤積四因三歸為池積以濶乘長池面平積也以平積除池積所得非池深而何

六則

遲疾求齊一法

設甲日築九尺乙日築六尺乙先築十日方令甲築求幾日工齊法曰以乙日築六尺乘先築十日得六十尺

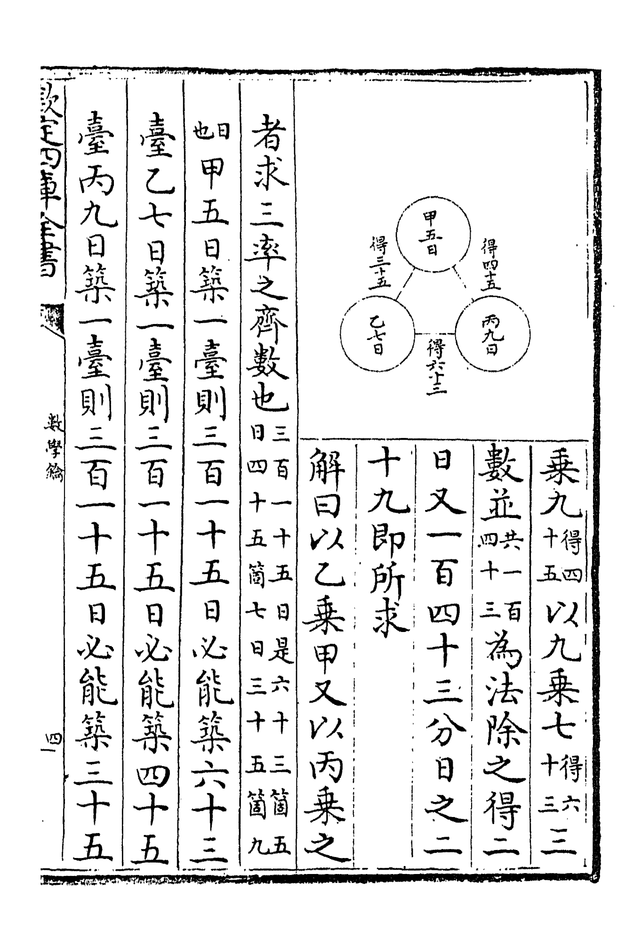
為實以甲日築九尺乙日築六尺相減餘三尺為法除之得二十日即所求

解曰乙先築十日必多甲六十尺甲日築多乙三尺二十日必亦多六十尺故同築二十日而齊

七則

遲疾求齊二法

設一臺甲約五日築完乙約七日築完丙約九日築完令甲乙丙同築求幾日完法曰以七乘五得三十五日再以九乘之得三百一十五日為實另以七乘五十得三十五以五



乘九（得四十五）以九乘七（得六十三）三數並（共一百四十三）為法除之得二日又一百四十三分日之二十九即所求

解曰以乙乘甲又以丙乘之者求三率之齊數也（三百一十五日是六十三箇五日四十五箇七日三十五箇九日也）甲五日築一臺則三百一十五日必能築六十三臺乙七日築一臺則三百一十五日必能築四十五臺丙九日築一臺則三百一十五日必能築三十五

臺是三人三百一十五日共築一百四十三臺也故以一百四十三臺除三百一十五日得三人共築一臺之日數

八則

遲疾求齊三法

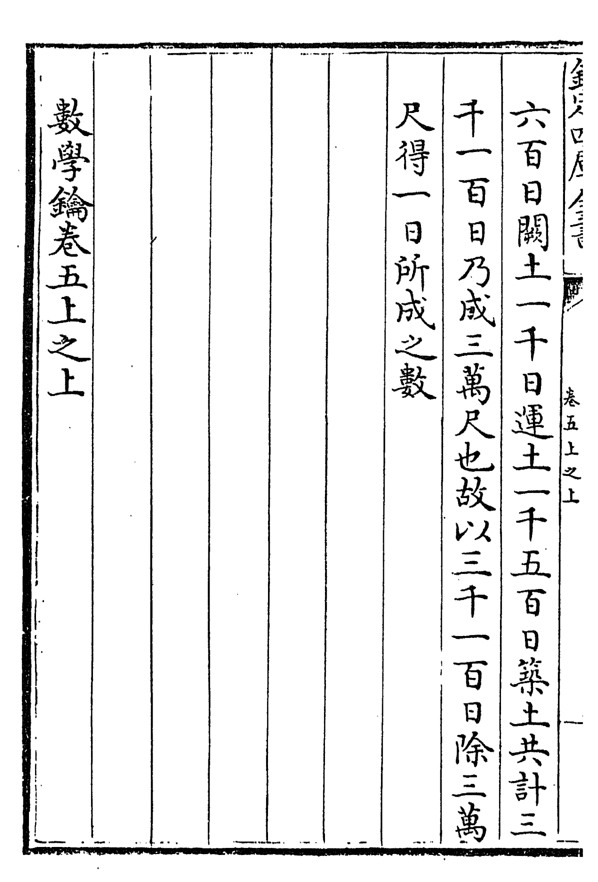
設一夫一日闕土可成五十尺一日運土可成三十尺一日築土可成二十尺令一夫自闕自運自築求日成幾何法曰以二十尺乘三十尺得六百尺再以五十尺乘之得三萬尺為實另以二十尺乘三十尺得六百日五十

尺乘二十尺（得一千日）三十尺乘五十尺（得一千五百日）三數並（共三千一百日）為法除之得九尺又三十一分尺之二十一即所求

解曰以二十尺乘三十尺再

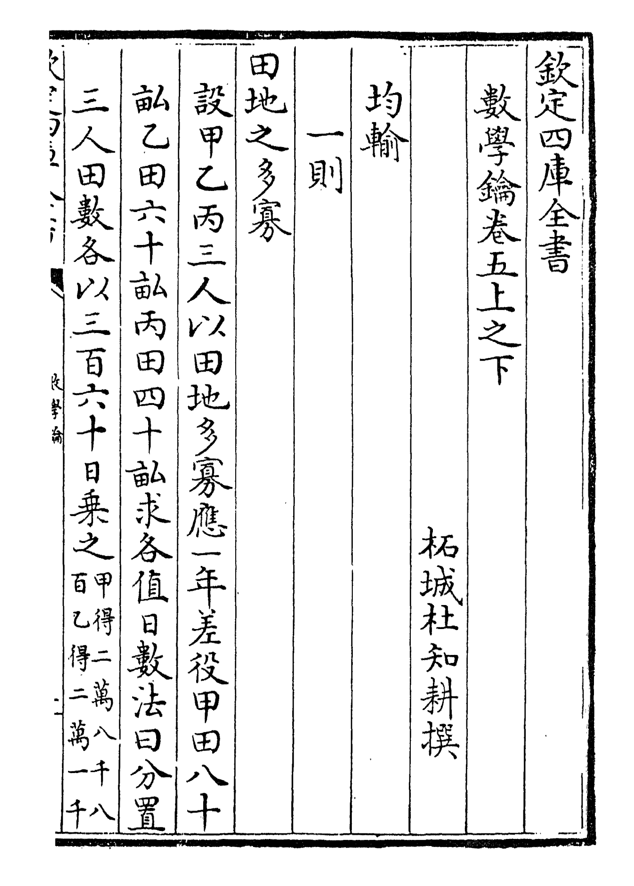
二十尺　三十尺　五十尺
得六百　得一千　得一千五百

以五十尺乘之亦取三率之齊數也（三萬尺是一千五百箇二十尺一千箇三十尺六百箇五十尺也）一日闢土成五十尺必六百日成三萬尺一日運土成三十尺必一千日成三萬尺一日築土成二十尺必一千五百日成三萬尺是一夫



六百日闕土一千日運土一千五百日築土共計三千一百日乃成三萬尺也故以三千一百日除三萬尺得一日所成之數

數學鑰卷五上之上



數學鑰卷五上之下

柘城杜知耕撰

均輸

一則

田地之多寡

設甲乙丙三人以田地多寡應一年差役甲田八十畝乙田六十畝丙田四十畝求各值日數法曰分置三人田數各以三百六十日乘之甲得二萬八千八百乙得二萬一千

六百丙得一萬四千四百並三人田數共一百八十畝為法除甲得一百六十日除乙得一百二十日除丙得八十日即所求

二則

方物之貴賤

設米九百石令甲乙二處以米價之貴賤均納之甲處米價每石五錢乙處米價每石七錢求各應納米數法曰置米為實並兩價共一兩二錢除之得七十五以七錢乘七十五得五百二十五石價二百六十二兩五錢為甲數以五錢乘七十五得三百七十五石價

亦二百六十二兩五錢為乙數

解曰甲乙米價既為五與七則甲乙納數必若七與五矣甲納數與共米必若乙價七錢與兩價並之一兩二錢也此借五錢與一兩二錢之比例因元米以求甲數也乙同此論

三則

道里之遠近一法

設牛車已行七日馬車方行六日行齊其程五百八十五里求各日行里數法曰置五百八十五里為實

以六日除之得九十七里半為馬車日行里數以七日六日相並共一十三日除實得四十五里為牛車日行里數

四則

道里之遠近二法

設自甲至乙八百五十五里馬車自乙往甲日行九十七里半同日行求幾日相遇法曰置八百五十五里為實並牛馬車日行里數共一百四十二里半除之得六日即所求

十五里牛車自甲反乙日行四

解曰此是彼來此往兩行相就與以疾追遲者不同故並兩日行數為法也

五則

任載之重輕一法

設原車載重八百斤行一千二百里與僦值八兩今載重一千二百斤行一千八百里求僦值法曰置僦值八兩為實以今重一千二百斤乘今行一千八百里得二百一十六萬為法乘實得一千七百二十八萬另以原重八百斤乘原行一千二百里得九十六萬為法除之得一十八

兩即所求

解曰此同乘同除法也任載半倍于原數僦值已當半倍八兩為十二兩道里復半倍于原數僦值故又半倍十二兩為十八兩

六則

任載之重輕二法

設重車日行五十里輕車日行七十里今載米至倉五日三返求至倉里數法曰置輕重車日行里數相乘得三百五十里又以五日乘之得一千七百五十里為實另並輕重

車日行里數以三返乘之（得三百六十）為法除之得四十八里又三十六分里之二十二即所求

解曰兩車日行里數相乘得三百五十里是兩車行之齊數也（三百五十里是七箇五十里亦五箇七十里）乃輕車五日重車七日所行之里數並兩車日行里數除之即得一日重往輕來之里數再以五日乘之三返除之即得至倉之里數法變用五日乘實三返乘法者亦同乘同除法也

七則

合均田地多寡方物貴賤道里遠近

設甲乙丙丁戊五處定粟二千石以田地之多寡道里之遠近粟價之貴賤均輸之甲地二萬零五百二十畝粟價每石二兩自輸本處乙地一萬二千三百一十二畝粟價每石一兩至輸所二百里丙地七千一百八十二畝粟價每石一兩二錢至輸所一百五十里丁地一萬三千三百三十八畝粟價每石一兩七錢至輸所二百五十里戊地五千一百三十畝粟價每石一兩三錢至輸所一百五十里每石每里僦

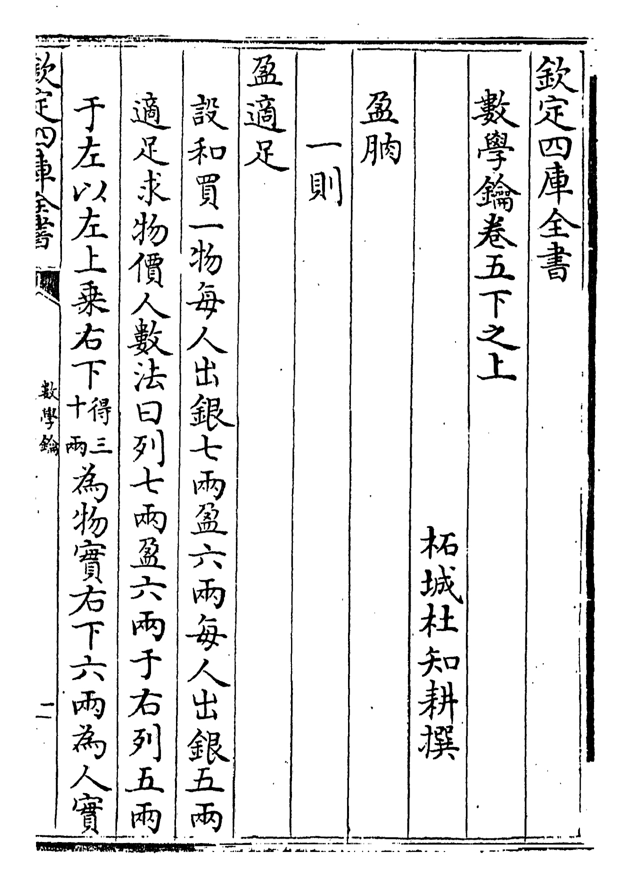
車銀四釐求各應輸數法曰先置甲地為實以粟價二兩為法除之得一千零二十六衰次置乙地為實以僦銀四釐因至輸所二百里得八錢並入粟價一兩共一兩八錢為法除實得六百八十四衰次置丙地為實以僦銀四釐因至輸所一百五十里得六錢並入粟價一兩二錢共一兩八錢為法除實得三百九十九衰又次置丁地為實以僦銀四釐因至輸所二百五十里得一兩並入粟價一兩七錢共二兩七錢為法除實得四百九十四衰末置戊地為實以僦銀四釐因至輸所一百

五十里(得六錢)並入粟價一兩三錢(共一兩九錢)為法除實得二百七十衰合五數(共二千八百七十三衰)為總衰置定粟二千石以甲衰乘之(得二百零五萬二千石)以總衰除之得七百一十四石二斗三升五合九勺九抄為甲數置二千石以乙衰乘之(得一百三十六萬八千石)以總衰除之得四百七十六石一斗五升七合三勺三抄為乙數置二千石以丙衰乘之(得七十九萬八千石)以總衰除之得二百七十七石七斗五升八合四勺四抄為丙數置二千石以丁衰乘之(得九十八萬八千石)以總衰除之得三百四十三石

八斗九升一合四勺為丁數置二千石以戊衰乘之得五十四萬石以總衰除之得一百八十七石九斗五升六合八勺四抄為戊數

解曰因地畝以定粟數則輸粟均矣而價值有貴賤猶未均也故取粟價除地畝以均貴賤貴賤均矣而道里有遠近猶未均也故又取僦值並入粟價以均遠近此衰分法也

數學鑰卷五上之下



數學鑰卷五下之上

栢城杜知耕撰

盈朒

一則

盈適足

設和買一物每人出銀七兩盈六兩每人出銀五兩適足求物價人數法曰列七兩盈六兩于右列五兩于左以左上乘右下得三十兩為物實右下六兩為人實

右　七兩

左　五兩

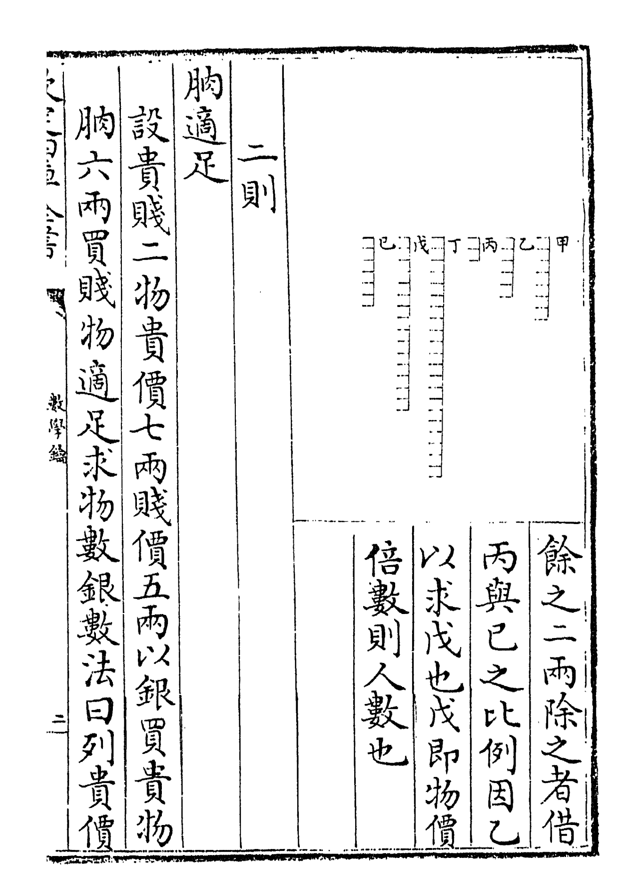
對減餘二兩

盈六兩得三十

適足

另以左上右上對減餘二兩為法以法除物實得一十五兩為物價以法除人實得三為人數

解曰甲為七兩乙為五兩丙為五兩七兩對減之二兩各三倍之為丁戊已已即出七兩所盈之六兩已與戊或與丁之比例必若丙與乙或與甲也丁與甲戊與乙之比例必皆若已與丙也法以五兩乘盈六兩以對減所



餘之二兩除之者借丙與己之比例因乙以求戊也戊即物價倍數則人數也

二則

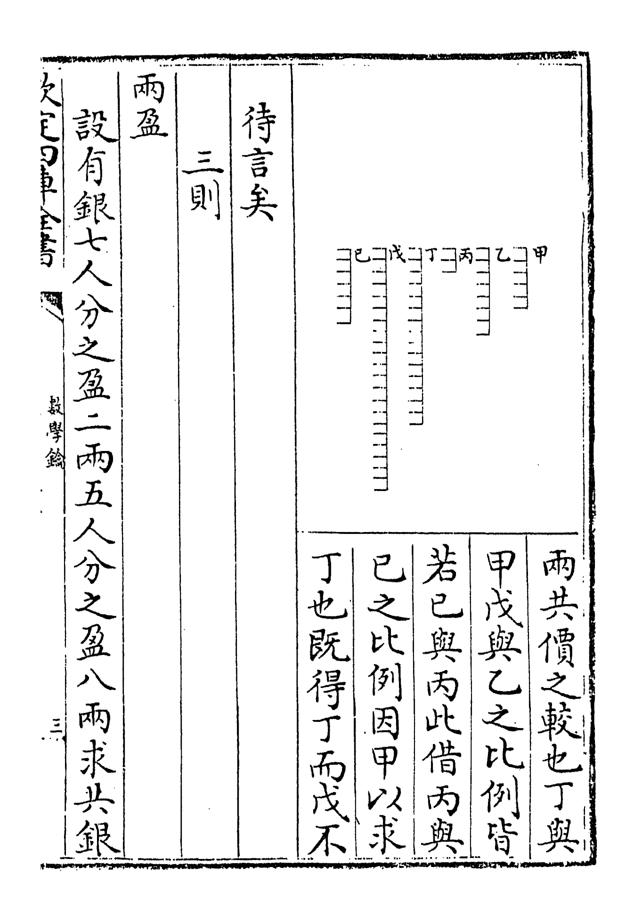
朒適足

設貴賤二物貴價七兩賤價五兩以銀買貴物朒六兩買賤物適足求物數銀數法曰列貴價

右
七兩
朒六兩
得三十
左
五兩
適足
對減餘二

七兩朒六兩于右列賤價五兩于左以左上乘右下得三十兩為銀實右下六兩為物實另以左上右上對減餘二兩為法以法除銀實得一十五兩為銀數以法除物實得三為物數

解曰甲為賤價乙為貴價丙為兩價之較丁為賤物之共價即銀數也戊為貴物之共價已則



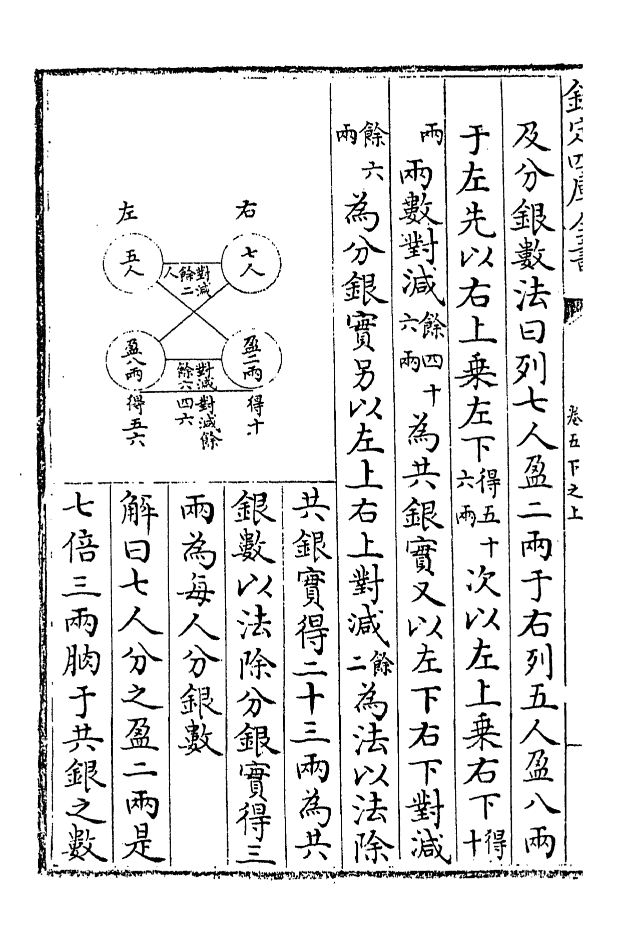
兩共價之較也丁與甲戊與乙之比例皆若己與丙此借丙與己之比例因甲以求丁也既得丁而戊不待言矣

三則

兩盈

設有銀七人分之盈二兩五人分之盈八兩求共銀

及分銀數法曰列七人盈二兩于右列五人盈八兩于左先以右上乘左下得五十六兩次以左上乘右下得十兩兩數對減餘四十六兩為共銀實又以左下右下對減餘六兩為分銀實另以左上右上對減餘二為法以法除



共銀實得二十三兩為共銀數以法除分銀實得三兩為每人分銀數

解曰七人分之盈二兩是七倍三兩朒于共銀之數

以五人乘之則是三十五倍三兩朒于五倍共銀之數也又五人分之盈八兩是五倍三兩朒于共銀之數以七人乘之則是三十五倍三兩朒于七倍共銀之數也今以三十五倍三兩朒于五倍共銀之數一即減三十五倍三兩朒于七倍共銀之數六兩即五十所餘必二倍共銀之數矣故以五七對減之二為法除之即得共銀也以法除分銀實得分銀數與前二則除人實物實得人數物數同

四則

兩朒

設有銀每人分七兩朒八兩每人分五兩朒二兩求人及銀數法曰列分七兩朒八兩于右列分五兩朒二兩于左先以右上乘左下得十四兩次以左上乘右下得四十兩數相減餘二十六兩為銀實又以左下右下對減餘六兩為人實另以左上右上對減餘二兩為法以法除銀實得一十三兩為銀數

右　分七兩　朒八兩　得四十
左　分五兩　朒二兩　得十四
對減餘二
對減餘六
對減餘二十六

以法除人實得三為人數

解曰以五兩乘朐八兩得四十兩為三十五倍三兩盈于五倍共銀之數以七兩乘朐二兩得一十四兩為三十五倍三兩盈于七倍共銀之數相減之餘必為二倍共銀之數故以法除之得銀數餘同前解

五則

一盈一朐

設木不知高以索五摺比之木朐二尺七摺比之木盈三尺求木高及索長法曰以五摺因朐二尺得十

尺以七揖因盈三尺得二十一尺列五揖朒十尺于右列七揖盈二十一尺于左先以右上乘左下得一百零五尺次以左上乘右下得七十尺

右　左
五揖　七揖
對減餘二揖
朒十尺　盈二十一尺
得七十　得一百零五
並共一百七十五

兩數並共一百七十五尺為索實又並左下右下共三十一尺為木實另以左上右上對減餘二揖為法以法除索實得八十七尺五寸為索長以法除木實得一十五尺五寸為木高

解曰同此一索或為七搢或為五搢必五搢長而七搢短也雖不知每搢之度而每五長搢之盈于五短搢者必二短搢每七短搢之朒于七長搢者必二長搢今長搢盈于木高二尺木索盈于木也朒于索是五長搢盈于五倍木高必十尺以七乘十尺則為三十五長搢盈于三十五倍木高之度短搢朒于木高三尺木盈于索是索朒于木也七短搢朒于七倍木高必二十一尺以五乘二十一尺則為三十五短搢朒于三十五倍木高之度兩數並即一百七十五尺為索實者則三十五長搢盈于三十五

短棢之度矣然三十五長棢盈于三十五短棢者即七倍五長棢盈于七倍五短棢之度亦即五倍七短棢朒于五倍七長棢之度也五倍七短棢之朒于五倍七長棢者十長棢之度也七倍五長棢之盈于七倍五短棢者十四短棢之度也十四短棢為索之倍長十長棢亦索之倍長也故以五七對減之二除之得索長餘同前解

六則

帶分子母盈適足朒適足同

設物以銀三分之二買之盈五兩以銀二分之一買之適足求物價銀數法曰列母三子二盈五兩于右列母二子一于左先以右上乘左中得三兩即以三兩乘右下得一十五兩為物實又以兩母相乘得六兩即

右　左

母三分　母二分

相乘得六

子之二　子之一

得四　對減餘一　得三

盈五兩　適足

得三十　得一十五

以六兩乘右下得三十兩為銀實又以左上乘右中得四兩與左中得數相減餘一兩為法以法除物

實仍得一十五兩為物價以法除銀實仍得三十兩為銀數

解曰以兩母相乘得六兩取兩母之齊數也六兩為二倍三兩亦三倍二兩也右母乘左子得三兩即六兩二分之一也左母乘右子得四兩即六兩三分之二也以六兩三分之二之四兩與六兩二分之一之三兩較相差止一兩今三分之二盈五兩二分之一適足是元銀三分之二與元銀二分之一較則相差五兩矣以相差之五兩與相差之一兩較為五倍之比例因知元銀

之與六兩物價之與三兩必皆為五倍之比例法以六兩乘五兩以一兩除之者是借一兩與五兩之比例因六兩以求元銀也以三兩乘五兩以一兩除之者亦借一兩與五兩之比例因三兩以求物價也

七則

帶分子母兩盈兩朒同

設物以銀四分之三買之盈七兩五錢以銀六分之四買之盈五兩求物價銀數法曰列母四子三盈七兩五錢于右列母六子四盈五兩于左先以右上乘

右　左
母四分　母六分
相乘得二十四
子之三　子之四
對減餘二
得十八　得十六
盈七兩五錢　盈五兩
得一百八十　得九十
對減餘三十
得一百二十
對減餘六十

左中得一十六兩即以一十六兩乘右下得一百二十一兩次以左上乘右中得一十八兩即以一十八兩乘左下得九十兩兩數相減餘三十兩為物實又以兩母相乘得二十四兩以二十四兩乘右下得一百八十兩以二十四兩乘左下得一百二十兩兩數相減餘六十兩為銀實另以左中右中兩得數相減餘二兩為法以法除物實得一

十五兩為物價以法除銀實得三十兩為銀數

解曰二十四兩為兩母之齊數左中得十六兩為二十四兩六分之四右中得十八兩為二十四兩四分之三兩數相差二兩今盈五兩與盈七兩五錢較則差二兩五錢是二十四兩與元銀之比例必若二兩與二兩五錢矣以二十四兩乘兩下對減為銀實以法除之亦借比例法也（先乘後相減與先減後乘得數同）又求物實本當以元銀六分之四乘右下四分之三乘左下然尚未得兩率之數不得不借與兩率比例等者用之

與兩率之比例等者乃二十四兩六分之四之十六與四分之三之十八也故以之互乘兩下左得九十兩為一十八倍元銀六分之四盈于一十八倍物價之數右得一百二十兩為一十六倍元銀四分之三盈于一十六倍物價之數而一十六倍四分之三與一十八倍六分之四兩數實等是以對減之餘即為二倍物價也故以十六十八對減之二除之得物價

八則

帶分子母一盈一朒

設物以銀十二分之七買之盈二兩五錢以銀六分之二買之朒五兩求物價銀數法曰列母十二子七盈二兩五錢于右列母六子二朒五兩于左先以右上乘左中得二十四兩即以二十四兩乘右下得六十兩

右　左

母十二分　母六分

相乘得七十二

子之七　子之二

得四十二　對減餘十八　得二十四

盈二兩五錢　朒五兩

得六十　得一百二十

得一百八十　共二百七十　得三百六十

共五百四十

次以左上乘右中得四十二兩即以四十二兩乘左下得二百一十兩兩數並共二百七十兩為物實又以

兩母相乘得七十二兩以七十二兩乘左下（得三百六十兩）以七十二兩乘右下（得一百八十兩）兩數並（共五百四十兩）為銀實另以左中右中兩得數相減（餘一十八兩）為法以法除物實得一十五兩為物價以法除銀實得三十兩為銀數

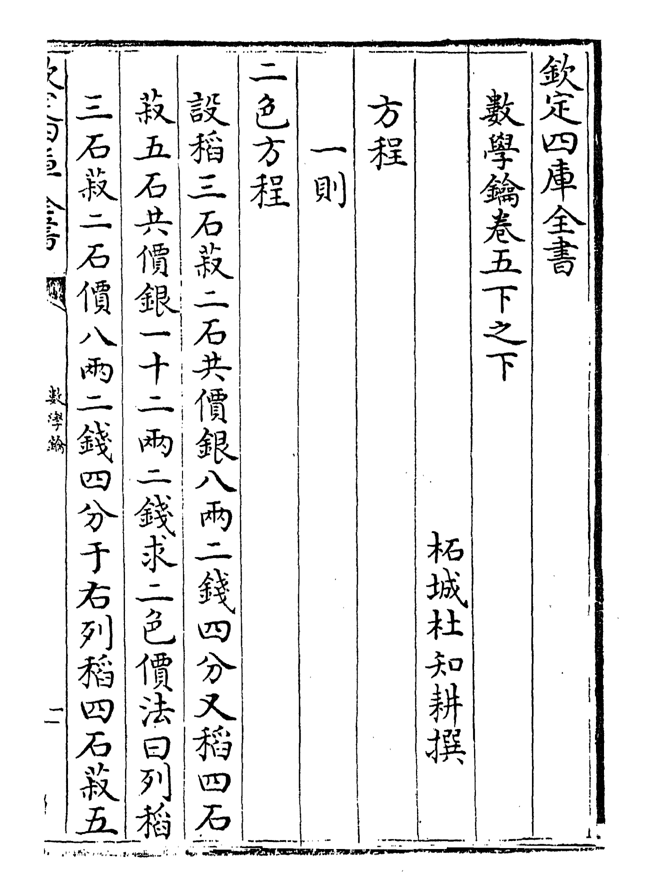
解曰七十二兩為兩母之齊數二十四兩為七十二兩六分之二四十二兩為七十二兩十二分之七兩數相差十八兩並盈朒兩數共七兩五錢（一盈一朒相並猶兩盈兩朒相減也）為元銀十二分之七與六分之二相差之數

是七十二兩與元銀之比例必若十八兩之與七兩五錢矣以七十二兩乘兩下相並爲銀實以十八除之亦借比例法也解同前又求物實以四十二兩乘左下得二百一十兩爲四十二倍六分之二朒于四十二倍物價之數以二十四兩乘右下得六十兩爲二十四倍十二分之七盈于二十四倍物價之數然四十二倍六分之二實與二十四倍十二分之七等今並六十兩與二百一十兩共二百七十兩必四十二倍物價盈于二十四倍物價之數也四十二倍物價

之盈于二十四倍物價者即十八倍物價故以十八為法除之得物價○又法以左中得數二十四兩乘左下得數二百一十兩得五千零四十兩以右中得數四十二兩乘右下得數六十兩得二千五百二十兩並兩數共七千五百六十兩另以兩子二七相乘得一十四兩除之得五百四十兩為銀實以前法十八除之得數同○左下先以四十二乘之又以二十四乘之右下先以二十四乘之又以四十二乘之猶以二十四與四十二相乘得一千零八以乘之也以

一千零八乘之又以兩中相乘得一十四除之猶以一十四除一千零八得七十二以乘之也前法元以兩母相乘得七十二以乘兩下得數相並為銀實與後法無異故得數同也

數學鑰卷五下之上


欽定四庫全書

數學鑰卷五下之下

柘城杜知耕撰

方程

一則

二色方程

設稻三石菽二石共價銀八兩二錢四分又稻四石菽五石共價銀一十二兩二錢求二色價法曰列稻三石菽二石價八兩二錢四分于右列稻四石菽五

石價一十二兩二錢于左先以右稻徧乘左行菽得一十五石價得三十六兩六錢次以左稻徧乘右行菽得八石

右　稻三石　十二　菽二石　八石　八兩六錢分　三十二兩九錢六分

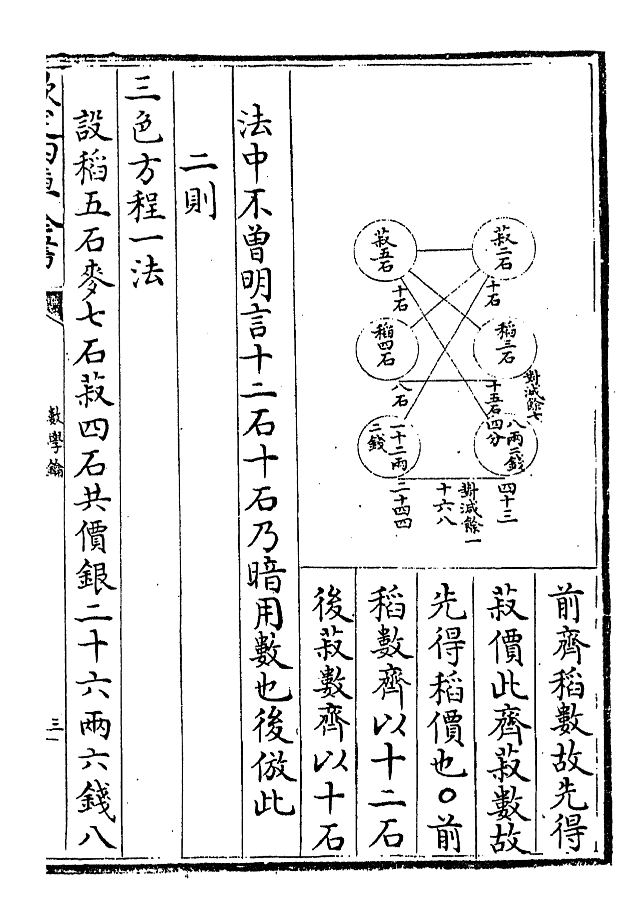
左　稻四石　十二　菽五石　十五石　對減餘七　十二兩二錢　三十六兩六錢　對減餘三兩六錢四分

價得三十二兩九錢六分以兩價得數對減餘三兩六錢四分為實以兩菽得數相減餘七石為法除之得五錢二分為菽每石價以右行菽二石因之或用左行菽五石亦可得一兩零四分為菽二石價以減右共價餘七兩二錢為稻三石價

以稻三石歸之得二兩四錢為稻每石價

解曰欲得稻菽二色價須先求菽一色價欲求菽一色價須先減去稻數及稻價欲減去稻數及稻價必先齊兩行稻數稻價而使之等今左價一十二兩二錢為稻四石菽五石之共價以右稻三石遍乘之價得三十六兩六錢是三倍元價矣既三倍元價則必為三倍稻數十二石三倍菽數十五石之共價右價八兩二錢四分為稻三石菽二石之共價以左稻四石遍乘之價得三十二兩九錢六分是四倍元價矣

既四倍元價則必為四倍稻數十二石四倍菽數八石之共價兩行稻數既各十二石是稻數齊矣稻數齊而稻價因之亦齊矣于稻十二石菽十五石價内減去稻十二石菽八石之價所餘非菽七石之價而何故以兩菽對減之七石除之得菽價菽價既得求稻價不須解矣○如欲先得稻價則列兩菽數于兩稻數之上以右菽二石遍乘左行以左菽五石遍乘右行兩價得數相減餘十六兩八錢為實兩稻得數對減餘七石為法除之得稻價此與前法同



前齊稻數故先得菽價此齊菽數故先得稻價也○前稻數齊以十二石後菽數齊以十石

法中不曾明言十二石十石乃暗用數也後做此

二則

三色方程一法

設稻五石麥七石菽四石共價銀二十六兩六錢八

分又稻四石麥二石菽三石共價銀一十四兩七錢
六分又稻七石麥五石菽七石共價銀二十九兩四

右
稻五石
二十
麥七石
二十八
對減餘十八
菽四石
十六
對減餘一
二十六兩六錢八分
一百零六七二
對減餘三十二九二

中
稻四石
二十八
二十
麥二石
十四
十
菽三石
二十一
十五
二十四兩七錢六分
七十三八
一百零三三二
對減餘一十四四四

左
稻七石
二十八
麥五石
二十
對減餘六
菽七石
二十八
對減餘七
二十九兩七錢四分
一百十七七六

錢四分求
三色價前
法曰列稻
五石麥七
石菽四石
價二十六
兩六錢八

分于左列稻四石麥二石菽三石價一十四兩七錢六分于中列稻七石麥五石菽七石價二十九兩四錢四分于左先以中稻四石遍乘右行麥得二十八石菽得一十六石價得一百零六兩七錢二分以右稻五石遍乘中行麥得一十石菽得一十五石價得七十三兩八錢兩行對減麥餘一十八石菽餘一石價餘三十二兩九錢二分次以中稻四石遍乘左行麥得二十石菽得二十八石價得一百一十七兩七錢六分以左稻七石遍乘中行麥得一十四石菽得二十一石價得一百零三兩三錢二分兩行對減麥餘六石菽餘七石價餘一十四兩四錢四分

解曰二色方程減去一色即得餘一色之價三色方程必減去二色方得一色之價然無一算並減二色之法故前法互乘對減先減去一色也

後法曰列餘麥一十八石餘菽一石餘價三十二兩九錢二分于右列餘麥六石餘菽七石餘價一十四兩四錢四分于左先以右麥一十八石遍乘左行得菽一百二十六石價得二百五十九兩九錢二分次以左麥六石遍乘右行得菽六石價得一百九十七兩五錢二分以兩價得數對減餘六十二兩四錢為實以兩菽得數對減餘一百二十石為法除之得五錢二分為

菽價以左菽七石因之得三兩六錢四分以減左價餘十兩零八錢以左麥六石除之得一兩八錢為麥價

取前圖中行麥二石因麥價得三兩六錢菽三石因菽價得一兩五錢六分並兩數共五兩一錢六分減中價餘九兩六錢以中稻四石除之得二兩四錢為稻價

解曰減去稻數稻價餘麥菽二色故用二色方程法

得菽價

三則

三色方程二法

設稻五石麥七石菽四石共價銀二十六兩六錢八分又稻四石麥二石菽三石共價銀一十四兩七錢

右

稻五石　二十

麥七石　二十八

菽四石　十六

二十六兩六錢八分　一百零六七二

對減餘十八

對減餘一

左

稻四石　二十

麥二石　十五

菽三石　十五

一十四兩七錢六分　七十三兩八

對減餘三十二九二

六分又麥五石菽七石共價銀一十二兩六錢四分求三色價前法曰列稻五石麥七石菽四石價二十六兩六錢八分于右列稻四石麥二石菽三石價一十四兩七錢六分于左先以右稻五石遍乘左行麥得二十石菽得一十五石價得七十三兩八錢次以左稻四石遍乘右行麥得二十八石菽得一十六石價得一百零六兩七錢二分兩行對減麥餘一十八石菽餘一石價餘三十二兩九錢二分

解曰麥五石菽七石價十二兩六錢四分不與兩行並列何也葢前法元為減去稻價稻數取麥菽二色

今此率本無稻數稻價故直與餘麥餘菽餘價並列為後後法也

後法曰列麥五石菽七石價一十二兩六錢四分于右列餘麥一十八石餘菽一石餘價三十二兩九錢二分于左先以右麥五石遍乘左行菽得五石價得一百六十四兩六錢次以左麥一十八石遍乘右行菽得一百

右　麥五石　九十　菽七石　對減餘一百二十一　一十二兩六錢四分　二百二十七五二　二百二十六

左　麥十八石　九十　菽一石　五　三十二兩九錢二分　一百六十四六　對減餘六十二九二

二十六石價得二百二十七兩五錢二分以兩價得數相減餘六十二兩九錢二分為實以兩菽得數對減餘一百二十一石為法除之得五錢二分為菽價求麥價稻價同前

四則

正負同異加減一法

設麥七石稷五石共價銀一十六兩二錢五分今以麥二石增銀二兩二錢四分換稷八石求二色價法曰列正麥七石正稷五石正價一十六兩二錢五分于右列負麥二石正稷八石正價二兩二錢四分于

右　左
正麥七石　負麥二石
十四　十四
正稷五石　正稷八石
十石　五十六
同加共六十六
正價一十六兩二錢五分　正價二兩二錢四分
三十二兩五錢　一十五兩六錢八分
同加共四十八兩一錢八分

左先以右正麥七石遍乘左行稷得五十六石價得一十五兩六錢八分次以左負麥二石遍乘右行稷得十石價得三十二兩五錢兩價得數同名相加共四十八兩一錢八分為實兩稷得數同名相加共六十六石為法除之得七錢三分為稷價

求麥價同一則

解曰左行價二兩二錢四分增二石麥價方與稷八

石之價等麥二石乃倒欠之數故謂之負餘皆謂之正者所以别于負也左右兩麥相乘各得一十四石為正負之齊數以負麥遍乘右行價得三十二兩五錢為麥一十四石稷十石之共價以正麥遍乘左行價得一十五兩六錢八分尚欠一十四石麥價不足稷五十六石之價若將右行麥一十四石之價移于左行則右銀必為稷十石之價左銀必為稷五十六石之價故並之為稷六十六石之價〇以正加正以負加負謂之同名相加以正減正以負減負謂之同

名相減以正加負以負加正謂之異名相加以正減負以負減正謂之異名相減

五則

正負同異加減二法

設稻四石黍七石共價銀一十五兩五錢五分今以黍三石增銀九兩四錢五分換稻五石求二色價法曰列正稻四石正黍七石正價一十五兩五錢五分于右列正稻五石負黍三石正價九兩四錢五分于左先以右正稻四石遍乘左行黍得一十二石價得三十七兩八錢次

右　左

正稻四石　正稻五石

二十　二十

正黍七石　負黍三石

異加共四十七

三十五　十二

正價一十五兩五錢五分　正價九兩四錢五分

七十七七五　同減餘三十九九五　三十七八

以左正稻五石遍乘右行（黍五石得三十五石價得七十七兩七錢五分）兩價得數同名相減（餘三十九兩九錢五分）為實兩黍得數異名相加（共四十七石）為法除之得八錢五分為黍價（求稻價同一則）

解曰以右稻遍乘左行價得三十七兩八錢尚欠一十二石黍價不足稻二十石之價以左稻遍乘右行

價得七十七兩七錢五分為稻二十石黍三十五石之共價若以稻二十石全價減之必餘黍三十五石之價令以左行尚欠一十二石黍價不足稻二十石之價減之故餘四十七石黍價也

六則

正負同異加減三法

設麥五石稷八石共價銀一十四兩八錢四分又麥四石黍二石共價銀八兩九錢又黍五石稷三石共價銀六兩四錢四分求三色價前法曰列麥五石黍

右
麥五石
二十
空
本位空立負黍十
稷八石
三十二
右行無減仍得三十二
一十四兩八錢四分
五十九三六
對減餘一十四八六
左
麥四石
二十
黍二石
十
空
八兩九錢
四十四五

空稷八石價一十四兩八錢四分于右列麥四石黍二石稷空價八兩九錢于左先以右麥五石遍乘左行黍得十石價得四十四兩五錢次以左麥四石遍乘右行稷得三十二石價得五十九兩三錢六分兩行對減右行黍空取左黍十石為本位負數左行稷空右稷無減仍得三十二石價餘一

十四兩八錢六分

解曰以右麥遍乘左行價得四十四兩五錢為麥二十石黍十石之共價以左麥遍乘右行價得五十九兩三錢六分為麥二十石稷三十二石之共價兩價對減必餘右稷三十二石與左黍十石兩價相差之數于右立負黍十石者謂餘價一十四兩八錢六分再增黍十石之價方足稷三十二石之價猶以黍十石增銀一十四兩八錢六分換稷三十二石也或問右行黍空左行稷空不立負于左而必立負于右者

何也蓋前法原于多內減少以取二色之價今右稷三十二石價多于左黍十石價若于左立負稷亦須立負價矣是以立負于右而不立于左也

後法曰列正黍五石正稷三石正價六兩四錢四分

右
正黍五石
正稷三石
正價六兩四錢四分
左
負黍十石
正稷三十二石
正價一十四兩八錢六分
五十
卒
三十
一百六十
同加共一百九十
六十四四
七十四三
同加共一百三十八七

于右列餘負黍十石餘正稷三十二石餘正價一十四兩八錢六分于左先以右正黍五石

徧乘左行

徧乘左行稷得一百六十石價得七十四兩三錢次以左負黍十石徧乘右行稷得三十石價得六十四兩四錢兩價得數同名相加共一百三十八兩七十錢為實兩稷得數同名相加共九十一百石為法除之得七兩三錢為稷價求麥價黍價同二則

解曰後法同四則

七則

正負同異加減四法

設麥四石黍五石價銀一十一兩四錢五分又麥五石稷二石價銀一十兩零四錢六分又黍四石稷七

石價銀八兩五錢一分求三色價前法曰列麥四石

左　右
麥五石　麥四石
二十　二十
空　黍五石
二十五
左行無減仍得二十五
稷二石　空
八
本位空立負稷八
十兩零四錢六分　一十一兩四錢五分
四十一八四　對減餘一十五四一　五十七二五

黍五石稷空價一十一兩四錢五分于右列麥五石黍空稷二石價一十兩零四錢六分于左先以右麥四石遍乘左行稷得八石價得四十一兩八錢四分次以左麥五石遍乘右行黍得二十五石價得五十七兩二錢五分兩行對減左行黍空右

黍無減仍得二十五石右行稷空取左稷八石為本位負數價餘一十五兩四錢一分

解曰右價得五十七兩二錢五分為麥二十石黍二十五石之共價左價得四十一兩八錢四分為麥二十石稷八石之共價兩價對減餘一十五兩四錢一分即二十五石黍價多于八石稷價之數是以餘銀並八石稷價方足黍二十五石之價故立負稷八石也餘同前則

後法曰列正黍四石正稷七石正價八兩五錢一分

右　左

正黍四石　正黍二十五石

一百　一百

正稷七石　負稷八石

一百七十五　三十二

異加共二百零七石

正價八兩五錢一分　正價一十五兩四錢一分

二百一十二兩七五　同減餘一百五十一兩一一　六十一兩六四

于右列餘正黍二十五石餘負稷八石餘正價一十五兩四錢一分于左先以右正黍四石遍乘左行稷得三十二石價得六十一兩六錢四分次以左正黍二十五石遍乘右行稷得一百七十五石價得二百一十二兩七錢五分兩價得數同名相減餘一百五十一兩一錢一分為實兩稷得數異名相加共二百零七石為法除之得七錢三分為稷價求黍價參價同二則

解曰後法同五則

八則

正負同異加減五法

設以稷七石增銀四兩零七分換麥二石粟九石又以麥三石換稷四石粟四石適平又以麥一石稷一石增銀四兩九錢一分換粟一十二石求三色價

法曰列正麥二石負稷七石正粟九石正價四兩零七分于右列負麥三石正稷四石正粟四石價空于中列負麥一石負稷一石正粟一十二石正價四兩

左　中　右

負麥一石　負麥三石　正麥二石

負稷一石　正稷四石　負稷七石

正粟十一石　正粟四石　正粟九石

正價四兩九錢一分　空　正價四兩零七分

三　三　六　六石

三　四　八　三十

異加共七　異減餘十三

三十六　四　八　二十七

同減餘三十二　同加共三十五

一十四七三　無減仍一十四七三　無加仍一十二二一　一十二二一

九錢一分于左先以右正麥二石遍乘中行稷得八石粟得八石價空以中負麥三石遍乘右行稷得二十一石粟得二十七石價得一十二兩二錢一分兩稷得數異名相減餘一十三石兩粟得數同名相加共三十五

石中價空無加仍得一十二兩二錢一分

解曰右價得一十二兩二錢一分是尚欠稷二十一石價不足麥六石粟二十七石之價中價空是稷八石粟八石適等于麥六石之價若減右麥六石即以稷粟各八石補之其價不須增減必相均平矣然右稷乃倒欠之數不可相加故減之減倒欠猶之加正數也

次以左負麥一石遍乘中行稷仍得四石粟仍得四石價空以中負麥三石遍乘左行稷得三石粟得三十六石價得一十四兩七錢三分兩稷得

數異名相加共七石兩粟得數同名相減餘三十二石中價空無減仍得一十四兩七錢三分

解曰左價得一十四兩七錢三分是尚欠麥稷各三石價不足粟三十六石之價中價空是麥三石適等于稷粟各四石之價若減左負麥三石復減正稷正粟各四石其價不須增減必相均平然左非正稷乃倒欠之數不可相減故加之加倒欠猶之減正數也

後法曰列餘負稷一十三石餘正粟三十五石餘正價一十二兩二錢一分于右列餘負稷七石餘正粟

右
負稷十三石
正粟三十五石
正價一十二兩一錢一分
左
負稷七石
正粟三十二石
正價一十四兩七錢三分
九十一
九十一
四百一十六
二百四十五
同減餘一百七十一
八十五四七
一百九十一四九
同減餘一百零六零二

三十二石餘正價一十四兩七錢三分于左先以右負稷一十三石遍乘左行（粟得四百一十六石價得一百九十一兩四錢九分）次以左負稷七石遍乘右行（粟得二百四十五石價得八十五兩四錢七分）兩價得數同名相減（餘一百零六兩零二分）為實兩粟得數同名相減（餘一百七十一石）為法除之得六錢二分為粟價（求麥價稷價同二則）

解曰兩稷皆負兩粟兩價皆正左右相等故法同二色方程

九則

四色方程

設稻一石麥五石黍三石稷七石共價銀一十九兩零六分又稻八石麥四石黍七石稷六石共價銀三十六兩七錢三分又稻三石麥二石黍五石稷七石共價銀二十兩零一錢六分又稻四石麥二石黍六石稷四石共價銀二十一兩二錢二分求四色價前

右

稻一石

八石

麥五石

四十

黍三石

二十四

稷七石

五十六

十九兩零六分

一百五十二四八

同減餘三十六

同減餘十七

同減餘五十

同減餘一百一十五七五

次右

稻八石

二十四　八石

麥四石

十二　四石

黍七石

二十一　七石

稷六石

十八　六石

七錢三分　三十六兩

一百一十零一九

仍三十六七三

同減餘四石

同減餘十九

同減餘三十八

同減餘五十一零九

次左

稻三石

十二　二十四

麥二石

八　十六

黍五石

二十　四十

稷七石

二十八　五十六

二十兩零一錢六分

八十零六四

一百六十一二八

同減餘二

同減餘二

同減餘十六

同減餘十六九八

左

稻四石

十二

麥二石

六

黍六石

十八

稷四石

十二

二十一兩二錢二分

六十三六六

法曰列稻一石麥五石黍三石稷七石價一十九兩零六分于右列稻八石麥四石黍七石稷六石價三十六兩七錢三分于次右列稻三石麥二石黍五石稷七石價二十兩零一錢六分于次左列稻四石麥二石黍六石稷四石價二十一兩二錢二分于左先以右稻一石遍乘次右行仍得元數以次右稻八石遍乘右行麥得四十石黍得二十四石稷得五十六石價得一百五十二兩四錢八分兩行對減麥餘三十六石黍餘一十七石稷餘五十石價餘一百一十五兩七錢五分次以次右稻八石遍乘次

左行麥得十六石黍得四十石稷得五十六石價得一百六十一兩二錢八分以次左稻三石遍乘次右行麥得十八石價得一百一十一兩零一錢九分兩行對減麥餘四石黍餘一十九石稷餘三十八石價餘五十一兩零九分末以次左稻三石遍乘左行麥得六石黍得一十八石稷得一十二石價得六十三兩六錢六分以左稻四石遍乘次左行麥得八石黍得二十石稷得二十八石價得八十兩零六錢四分二十兩行對減麥餘二石黍餘二石稷餘一十六石價餘一十六兩九錢八分

解曰前法減稻一色餘麥黍稷三色

次法曰列餘麥三十六石餘黍一十七石餘稷五十石餘價一百一十五兩七錢五分于右列餘麥四石餘黍一十九石餘稷三十八石餘價五十一兩零九分于中列餘麥二石餘黍二石餘稷一十六石餘價一十六兩九錢八分于左先以右麥三十六石遍乘中行黍得六百八十四石稷得一千三百六十八石價得一千八百三十九兩二錢四分以中麥四石遍乘右行黍得六十八石稷得二百石價得四百六十三兩兩行對減黍餘六百一十六石稷餘一千一百六十八石價餘一千三百七十六兩二錢四分次以中麥四石遍

左　中　右

麥二石　麥四石　麥二十六石

黍二石　黍十九石　黍十七石

稷十六石　稷三十八石　稷五十石

十六兩九錢八分　五十一兩零九分　一百五十五兩七錢五分

乘左行得黍八石稷得六十四石價得六十七兩九錢二分以左麥二石遍乘中行黍得三十八石稷得七十六石價得一百零二兩一錢八分兩行對減黍餘三十石稷餘一十二石價餘三十四兩二錢六分

解曰次法減麥一色餘黍稷二色

後法曰列餘黍六百一十六石餘稷一千一百六十八石餘價一千三百七十六兩二錢四分于右列餘黍三十石餘稷一十二石餘價三十四兩二錢六分于左以右黍六百一十六石遍乘左行稷得七千三百九十二石價得二萬一千一百零四兩一錢六分以左黍三

左　右

黍三十石　黍六百一十六石

一萬八千四百八十　一萬八千四百八十

稷一十二石　稷一千一百六十八石

七千三百九十二　三萬五千零四十

三十四兩二錢六分　一千三百七十六兩二錢四分

二萬一千一百零四一六　四萬一千二百八十七二

同減餘二萬七千六百四十八

同減餘二萬零一百八十三零四

十石遍乘右行稷得三萬五千零四十石價得兩四萬一千二百八十七兩二錢價得數對減餘二萬零一百八為實兩稷得數對減十三兩零四分為法除之得七錢三分為稷價減餘二萬七千六百四十八石

求黍麥稻價同二則

解曰後法同二色方程五色六色以上倣此。按方程之要在加減加減之關鍵在首位謂第一橫行首位同名則異名相加同名相減首位異名則同名相加異名相減然大略如是亦有不盡然者有應減者無可減而反加之有應加者無可加而反減之變化無窮

亦存乎人之自悟耳

數學鑰卷五下之下

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷六

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣盛世

數學鑰卷六凡例

柘城杜知耕撰

凡例

一則

縱曰股衡曰勾斜曰弦

二則

股大于勾者曰勾股較弦大于勾者曰勾弦較弦大于股者曰股弦較勾股並大于弦者曰弦和較

三則

勾股並曰勾股和勾弦並曰勾弦和股弦並曰股弦和勾股弦並曰勾股弦和亦曰弦和和

四則

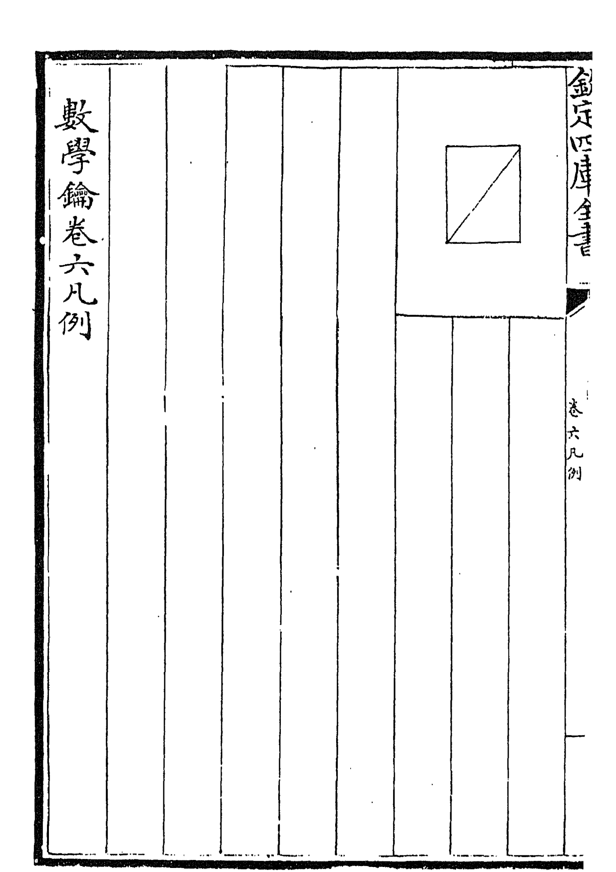
勾股較加股弦較即勾弦較勾弦較減股弦較即勾股較弦和較加勾弦較即股弦和較加股弦較即勾弦

和較加勾弦較股弦較即弦勾股較減股弦和即勾弦和勾股和加股弦較即勾弦和股弦和減勾弦和即勾股較股弦和減勾股和即勾弦較勾股較加勾股和半之為股勾股和減勾股較半之為勾股弦較加股弦和半之為弦股弦和減股弦較半之為股勾弦較加勾弦和半之為弦勾弦和減勾弦較半之為勾

勾用乘除開方相求者不在此例

五則

或方形或直形有對角斜線者曰角線形



數學鑰卷六凡例

欽定四庫全書

數學鑰卷六目録

柘城杜知耕撰

勾股

十五則勾及股弦較求股與弦
十六則股羃及勾弦較求勾弦和
十七則勾羃及股弦較求股弦和
十八則股羃及勾弦和求勾弦較
十九則勾羃及股弦和求股弦較
二十則勾弦較股弦較求勾股弦
二十一則相連之勾股求弦
二十二則相連之股弦求勾
二十三則相連之勾弦求股

數學鑰卷六目録

數學鑰卷六

柘城杜知耕撰

勾股

一則

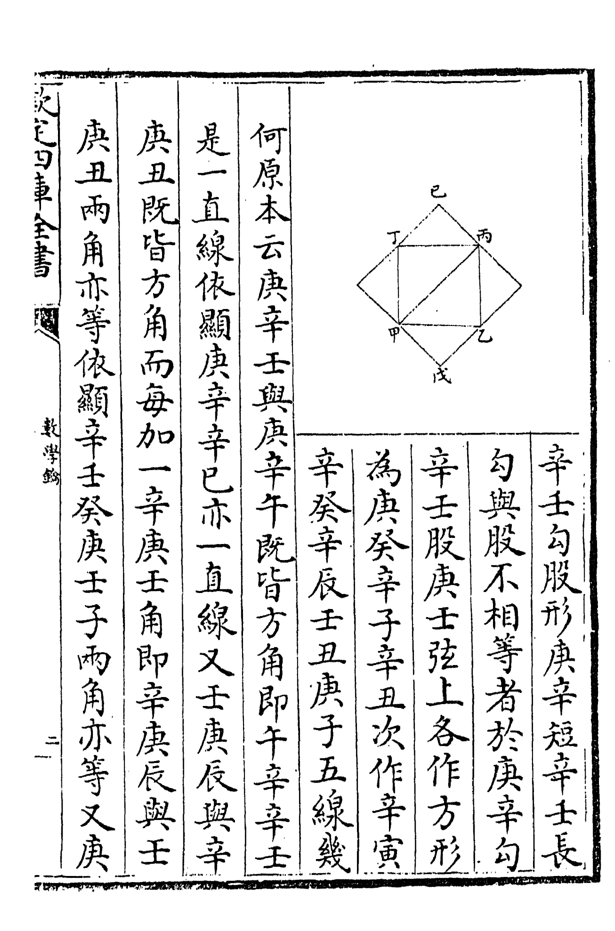
勾股求弦

設勾六尺股八尺求弦法曰置勾股各自乘(勾得三十六尺股得六十四尺)兩數並(共一百尺)平方開之得十尺即所求

解曰不論勾股相等與否勾上方形及股上方形並

必與弦上方形等如甲乙丙勾股形甲乙勾與丙乙股等試作乙丁等高同底方形其邊與甲乙等必為勾上方又與丙乙等亦必為股上方再

作戊巳外切方形其邊與甲丙等即為弦上方若于形内減去乙丁方形餘甲乙戊等四三角形並之復等一乙丁方形一卷一則十以乙丁為勾方以等乙丁之四三角形為股方並之不等于戊巳弦方乎又如庚



辛壬勾股形庚辛短辛壬長勾與股不相等者於庚辛勾辛壬股庚壬弦上各作方形為庚癸辛子辛丑次作辛寅辛癸辛辰壬丑庚子五線幾何原本云庚辛壬與庚辛午既皆方角即午辛辛壬是一直線依顯庚辛辛巳亦一直線又壬庚辰與辛庚丑既皆方角而每加一辛庚壬角即辛庚辰與壬庚丑兩角亦等依顯辛壬癸庚壬子兩角亦等又庚

辛辰三角形之辛庚庚辰兩邊與庚壬丑三角形之丑庚庚壬兩邊等辛庚辰與壬庚丑兩角復等則對等角之辛辰與壬丑兩邊亦等而此兩三角形亦等矣夫辛丑方形倍大于同庚丑底同在平行線內之庚壬丑三角形一卷八則既謂直形等于平行線內同底之象目形則必能倍大于平行線內同底之三

角形而辰卯直形亦倍大于同庚辰底同在平行線内之庚辛辰三角形則辛丑方形不與辰卯直形等乎依顯辛子方形與癸卯直形等則癸庚一形與辛子辛丑兩形並等矣法以勾股各自乘求勾股上兩方形也兩形並則為弦上之方積故平方開之得弦也

二則

勾弦求股

設勾六尺弦十尺求股法曰置勾弦各自乘勾得三十六尺弦得一百尺兩數相減餘六十四尺平方開之得八尺即所求

解曰弦上方積當一勾一股上方積于弦積内減去勾積所餘非股積而何故平方開之得股

三則

股弦求勾

設股八尺弦十尺求勾法曰置股弦各自乘股得六十四尺弦得一百尺兩數相減餘三十六尺平方開之得六尺即所求勾

解曰弦積内減去股積所餘必勾積故平方開之得

四則

勾股積及勾股較求弦

設勾股積二十四尺勾股較二尺求弦法曰置勾股積四因之得九十六尺另置勾股較自乘得四尺兩數並共一百尺平方開之得十尺即所求

解曰甲乙丙勾股形與戊已甲丁庚戊乙辛丁三勾股形等甲丙

為甲乙丙形之股甲己為戊己甲形之勾于甲丙截甲己餘己丙則勾股較也丙辛辛庚庚己各與己丙等是己辛為勾股較上方形又甲乙為甲乙丙形之弦而丁乙戊丁甲戊各與甲乙等是甲丁為弦上方形今並五形成一甲丁方形則是一弦上方形與四勾股積一勾股較上方積並等矣

故四因勾股積並入勾股較自乘之積平方開之得弦也又如壬子癸勾股形壬子勾與子癸股等四

形並即成一壬丑弦上方形而無餘凡遇勾股相等之勾股形四因積平方開之即得弦度

五則

弦及勾股較求勾股積

設弦十尺勾股較二尺求勾股積法曰置弦與勾股較各自乘弦得一百尺勾股較得四尺兩數相減餘九十六尺以四歸之得二十四尺即所求

解曰弦上方積減去勾股較上方積必餘四勾股積故四歸之得一勾股積

六則

弦及勾股積求勾股較

設弦十尺勾股積二十四尺求勾股較法曰置弦自乗得一百尺另置勾股積四因之得九十六尺兩數相減餘四尺平方開之得二尺即所求

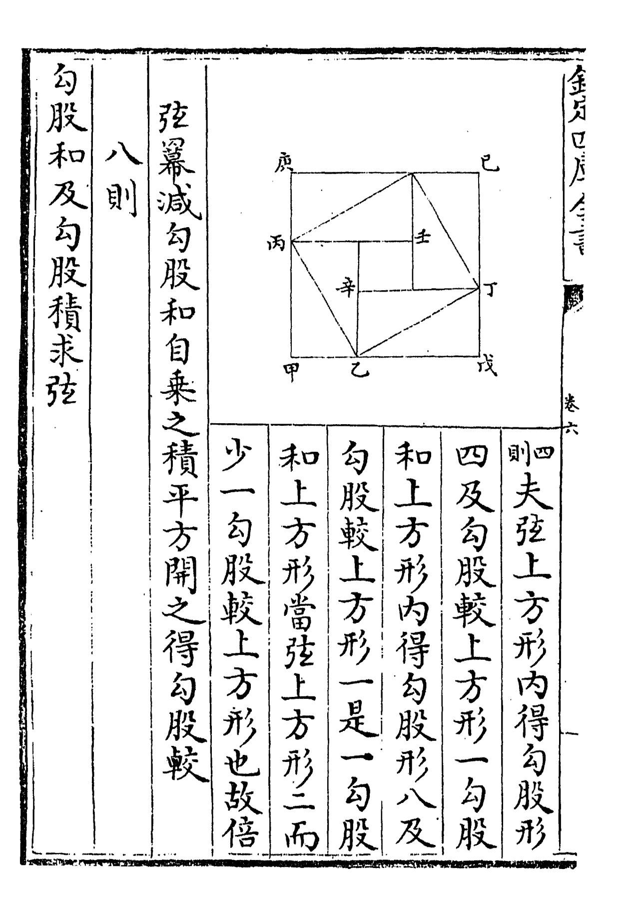
解曰弦上方積減去四勾股積所餘必勾股較上方積故平方開之得勾股較

七則

弦及勾股和求勾股較

設弦十尺勾股和一十四尺求勾股較法曰置弦自乘得一百尺倍之得二百尺另置勾股和自乘得一百九十六尺兩數相減餘四尺平方開之得二尺即所求

解曰甲巳方形內凡八勾股形而皆等乙戊為戊丁乙形之股甲乙為乙丙甲形之勾甲乙乙戊並得甲戊乃勾股和也餘三邊皆等于甲戊是甲巳為勾股和上方形又丙丁為弦上方形辛壬為勾股較上方形本卷



四則 夫弦上方形內得勾股形四及勾股較上方形一勾股和上方形內得勾股形八及勾股較上方形一是一勾股和上方形當弦上方形二而少一勾股較上方形也故倍

弦羃減勾股和自乘之積平方開之得勾股較

八則

勾股和及勾股積求弦

設勾股和一十四尺勾股積二十四尺求弦法曰置勾股和自乘得一百九十六尺另置勾股積四因之得九十六尺兩數相減餘一百尺平方開之得十尺即所求

解曰勾股和上方大于弦上方者四勾股積也故相減開方得弦

九則

勾股和及勾股積求勾股較

設勾股和一十四尺勾股積二十四尺求勾股較法曰置勾股和自乘得一百九十六尺另置勾股積八因之得一

百九十二尺 兩數相減餘四尺 平方開之得二尺即所求

解曰勾股和上方大于勾股較上方者八勾股積也

故相減開方得勾股較

十則

弦及勾股較求勾股和

設弦十尺勾股較二尺求勾股和法曰置弦自乘得一百尺 倍之得二百尺 另置勾股較自乘得四尺 兩數相減餘一百九十六尺 平方開之得一十四尺即所求

解曰倍弦上方積大于勾股和上方積者勾股較上

方積也故相減開方得勾股和

十一則

勾股積及勾股較求勾股和

設勾股積二十四尺勾股較二尺求勾股和法曰置勾股積八因之得一百九十二尺另置勾股較自乘得四尺兩數並共一百九十六尺平方開之得一十四尺即所求

解曰即九則法反用之

十二則

弦及勾股積求勾股和

設弦十尺勾股積二十四尺求勾股和法曰置弦自乘（得一百尺）另置勾股積四因之（得九十六尺）兩數並（共一百九十六尺）平方開之得一十四尺即所求

解曰即八則法反用之

十三則

勾弦和股弦和求勾股弦

設勾弦和一十六尺股弦和一十八尺求勾股弦法曰置勾弦和股弦和相乘（得二百八十八尺）倍之（得五百七十六尺）平方開之得二十四尺為勾股弦和與勾弦和相減

餘八尺即股與股弦和相減餘六尺即勾與二勾一股相減餘十尺即弦

解曰甲乙直形為勾弦和股弦和矩內形乙丁乙丙皆與弦等丁戊與勾等丙庚與股等則巳乙必為弦方巳戊必弦勾矩內形巳庚必弦股矩內形甲巳必勾股矩內形辛壬方形為勾股弦和上方形壬癸壬子皆與弦等癸丑子寅皆與股等丑卯寅辰皆與勾等則

巳壬必為弦方午巳必為股方辛午必為勾方未癸申子必皆股弦矩內形酉丑戌寅必皆勾弦矩內形午酉午戌必皆勾股矩內形今以辛壬方形與甲乙直形較則未癸申子並倍于巳庚酉丑戌寅並倍于巳戊午酉午戌並倍于甲

巳又午巳股方與辛午勾方並與巳壬弦方等是巳壬午巳辛午三形並復倍于巳乙分形既倍大于分形全形亦必倍大于全形是勾股弦和上方形一與勾弦和股弦和矩内形二並等矣故以勾弦和乘股弦和倍而開方得勾股弦和也于勾股弦和内減去一弦一股所餘必勾減去一弦一勾所餘必股減去一勾一股所餘必弦也

十四則

股及勾弦較求勾與弦

設股八尺勾弦較四尺求勾弦法曰置股自乘得六十四尺另置勾弦較自乘得一十六尺兩數相減餘四十八尺折半得二十四尺以勾弦較除之得六尺即勾加勾弦較得十尺即弦

解曰甲乙為弦上方形丙丁為勾上方形戊己為勾

弦較上方形于甲乙弦方內減去丙丁勾方所餘必股上方積成一辛壬癸磬折形再減去勾弦較上方形所餘必甲庚庚乙二直形而以甲丙乙丁為濶丙庚庚丁為長甲丙乙丁即勾弦較也丙庚庚丁為勾上方形之邊即勾也法以兩數相減所餘者即二直形也折半者取二直形之一也以勾弦較除之得勾者即以濶除積得長也○或以兩數相減之四十八尺為實倍勾弦較除之亦得勾○或以股自乘為實以勾弦較除之得數減勾弦較折半亦得勾

十五則

勾及股弦較求股與弦

設勾六尺股弦較二尺求股弦法曰置勾自乘得三十六尺另置股弦較自乘得四尺兩數相減餘三十二尺折半得一十六尺以股弦較除之得八尺即股加股弦較共十尺即弦

解曰甲乙弦方內減去丙丁股方戊巳股弦較方所餘必甲

庚庚乙丙直形折半則得一直形故以股弦較除之得股

十六則

股冪及勾弦較求勾弦和

設股冪六十四尺勾弦較四尺求勾弦和法曰置股

冪為實以勾弦較除之得一十六尺即所求

解曰十四則辛壬癸磬折形其甲乙元與弦等丙丁元與勾等若移癸

于戊則成辛壬戊直形以勾弦較為濶勾弦和為長矣故以勾弦較除股冪得勾弦和

十七則

勾冪及股弦較求股弦和

戊
丙 丁
乙 壬 癸
辛
甲

設勾冪三十六尺股弦較二尺求股弦和法曰置勾冪為實以股弦較除之得一十八尺即所求

解曰十五則辛壬癸磬折形其甲乙元與弦等丁丙元與股等若移癸于戊亦成辛壬戊直形以股弦較為濶股弦和為長矣故以股弦較除勾羃得股弦和

十八則

股羃及勾弦和求勾弦較

設股羃六十四尺勾弦和一十六尺求勾弦較法曰置股羃為實以勾弦和除之得四尺即所求

解曰即十六則法反用之

十九則

勾冪及股弦和求股弦較

設勾冪三十六尺股弦和一十八尺求股弦較法曰

置勾冪為實以股弦和除之得二尺即所求

解曰即十七則法反用之

二十則

勾弦較股弦較求勾股弦

設勾弦較四尺股弦較二尺求勾股弦法曰置勾弦

較股弦較相乘得八尺倍之得一十六尺平方開之得四尺加

股弦較得六尺即勾加勾弦較得八尺即股加勾弦

較股弦較得十尺即弦

解曰甲乙為弦方丁乙為勾方甲丙為股方以丁乙勾方甲丙股方錯綜加于甲乙弦方之上必缺戊巳庚辛二直形而重一丁丙方形然丁丙方形必能補二直形之缺而與之等何也丁乙勾方甲丙股方並等于甲乙弦方若丁丙方形或大或小于二直形則是勾方股方並不與弦方等矣夫勾方

股方並既與弦方等則二直形並亦必與丁丙方形等法以兩較相乘而倍之者求二直形也二直形以戊壬癸辛平方開之者求丁丙方形之一邊也勾弦較為長以壬巳癸庚股弦較為濶以一邊加股弦較之癸庚得癸丁即勾加勾弦較之戊壬得丙壬即股加一勾弦較之戊壬一股弦較之癸庚得癸丁及戊壬即弦

二十一則

相連之勾股求弦

設圓柱高二十尺周三尺以索繞柱七周與柱適齊

求索長法曰置柱周三尺以索繞七周因之（得二十一尺）自乘（得四百四十一尺）另置柱高自乘（得四百尺）兩數並（共八百四十一尺）平方開之得二十九尺即所求

解曰索繞柱七周即七段勾股也柱高二十尺為七股七周二十一尺為

七勾索長為七弦也此條元當七歸柱高取七股之一用勾股求弦法得數七因之為弦長然七歸二十尺乃畸零不盡之數不得不七因勾以就股也以柱高為股即並丁戊等七小股成一丙乙大股以七周為勾即並甲戊等七小勾成一甲乙大勾夫七小勾小股並既同于大勾大股而總求一甲丙大弦有不同于甲丁等七小弦並乎故求甲丙大弦為索長也

二十二則

相連之股弦求勾

設圓柱高二十尺索長二十九尺繞柱七周索與柱齊求柱周法曰置柱索各自乘柱得四百尺索得八百四十一尺兩數相減餘四百四十一尺平方開之得二十一尺以索繞七周歸之得三尺即所求

解同前

二十三則

相連之勾弦求股

設圓柱周三尺索長二十九尺繞柱七周索與柱齊求柱高法曰置柱周七因之得二十一尺自乘得四百四十一尺

另置索自乘得八百四十一尺兩數相減餘四百尺平方開之得二十尺即所求

解同二十一則

二十四則

勾股形求對角之垂線

設勾六尺股八尺弦十尺求對角垂線法曰置勾股相乘得四十八尺以弦除之得四尺八寸即所求

解曰勾股相乘必得丁丙直形與甲戊直形等何也丁丙直形倍大于甲乙丙勾股形甲戊直形

亦倍大于甲乙丙勾股形故等也以弦除積得垂線即以長除積得濶也

二十五則

勾股形于弦上求自角至垂線之度

設勾三尺股四尺弦五尺求自角至垂線之度法曰

置勾自乘得九尺以弦除之得一尺八寸即乙角

至垂線之度與弦相減得三尺二寸即甲角至垂線之度

解曰甲乙弦上方形以對角戊丁線分之必成二直

形而丁乙其一也丁乙直形與勾上方形等本卷一則以乙巳除之必得戊乙之度法以弦除者盖甲乙弦與乙巳等也○若欲先得甲戊則以弦除股冪

又法曰置弦為實以勾冪九尺乘之得四十五尺並勾股冪二十五尺除之亦得一尺八寸

解曰凡兩形等高形與形之比例若線與線十一卷四十五則甲丁戊巳兩形既等高前圖同則其比例必若甲戊與戊乙又甲丁與股冪等戊巳與勾冪等則股冪與勾冪之比例亦若甲戊與戊乙矣此借兩冪之比例因

全弦以求戊乙也○若欲先得甲戊則以股冪乘弦
并兩冪除之
又法曰并勾股共七尺以勾股較乘之仍得七尺以弦除之得一尺四寸與弦相減餘三尺六寸折半亦得一尺八寸
解曰此三角形求對角垂線法也卷三十一則○若欲先
得甲戊以一尺四寸與弦相并折半即得
二十六則
勾股求容方一法
設勾六尺股一十二尺求容以角切弦之方形法曰

置勾股相乘得七十二尺以勾股相並共一十八尺除之得四尺即容方之邊

解曰甲乙丙勾股形分甲丙弦于丁令丁甲與丁丙之比例若勾與股自丁作丁乙線必分勾股形為甲丁乙乙丁丙兩三角形一以勾為底一以股為底又兩分形之比例亦若勾與股幾何

原本云凡兩形等高者形與形之比例若底與底反之凡形與形之比例若底與底者兩形之高必相等

令兩分形各倍積求對角之垂線本卷二十四則一得丁戊一得丁已兩線必相等何也兩垂線即兩形之正高兩形之高既等故兩垂線必等也兩線既等而又為勾及股之垂線復切弦于丁則已戊形必為勾股所容之方而丁戊丁已即容方之邊也然分求之如是合求之亦必如是若並兩形之倍積為實並兩底除之亦得容方之邊與丁戊或丁已等夫兩形之倍積即勾與股相乘之積也兩分形之底即勾與股也故置勾股相乘並勾股除之即得容方之度也

二十七則

勾股求容方二法

設弦一十五尺對角垂線五尺求容以角切勾與股之方形法曰置垂線為實以弦乘之得七十五尺以垂線並弦除之得三尺七寸五分即容方之邊

甲
辛
己
丁
壬
戊
乙
庚
丙

解曰甲乙丙勾股形丙丁為對角垂線分垂線于戊令丙戊與

戊丁之比例若丙丁與甲乙則戊丁即所求之方邊幾何原本云作庚戊己線與甲乙平行次作庚壬己辛兩線各與丙丁平行己庚既與甲乙平行即甲丁與丁乙若己戊與戊庚也合之即甲乙與丁乙若己庚與戊庚也又丁乙與丙丁若戊庚與丙戊平之即甲乙與丙丁若己庚與丙戊也又丙丁與甲乙若丙戊與戊丁平之即甲乙與甲乙若己庚與戊丁也甲乙與甲乙同線必等即己庚與戊丁必等而己庚與辛壬又等戊丁與己辛庚壬亦等則辛庚形必勾股

所容之方形而戊丁即方邊之度法以弦乘垂線而並弦與垂線除之者借甲乙與丙丁之比例因丙丁以求戊丁也

二十八則

勾股求容圓

設勾二十七尺股三十六尺弦四十五尺求容圓法曰置勾股相乘得九百七十二尺為實並勾股弦共一百零八尺除之得九尺即容圓之半徑倍之得一十八尺即全徑

解曰甲乙丙勾股形自三角各出一線平分各角相

遇于丁即分勾股形為甲丁乙乙丁丙丙丁甲三三角形一以全形之勾為底一以股為底一以弦為底各角既平分而復有一邊同線則三形必等高令三形各倍積求對角之垂線（本卷二十四則）一得丁戊一得丁己一得丁庚三垂線必等何也三垂線即三形之正高三形既等高故垂線必等也三線既等其相遇處必容圓之心（幾何原本云凡圓內出三線至界而皆等者其點必

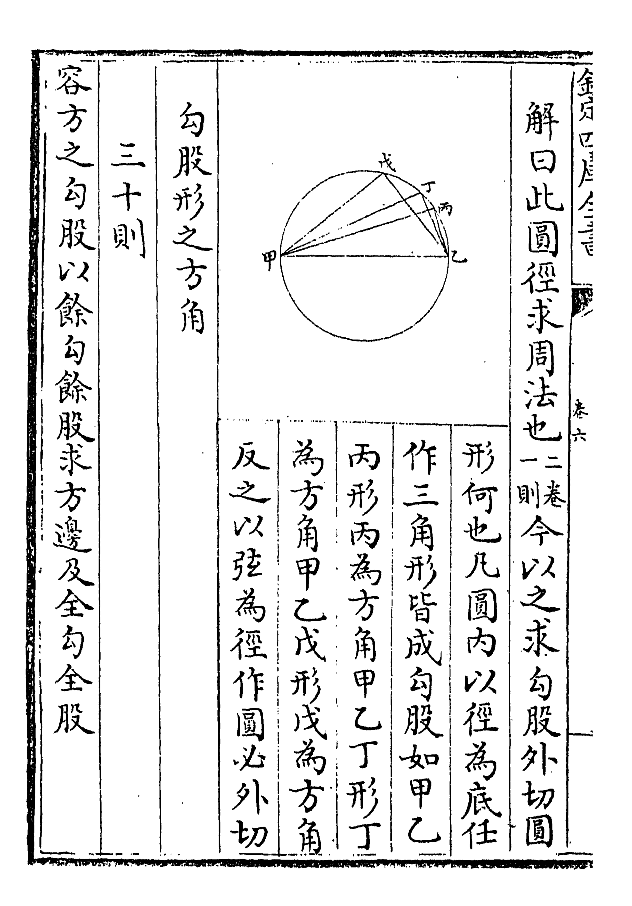
是圓心而三線皆半徑也然分求之如是合求之亦必如是若並三形之倍積為實並三底除之亦得容圓之半徑與丁戊或丁己或丁庚等夫三分形之倍積即勾與股相乘之積也三分形之底即勾股弦也故置勾股相乘並勾股弦除之得容圓之半徑也

二十九則

勾股求外切圓

設勾股弦長二十八尺求外切圓周法曰置弦二十二乘七除得八十八尺即所求

解曰此圓徑求周法也（二卷一則）今以之求勾股外切圓



形何也凡圓內以徑為底任作三角形皆成勾股如甲乙丙形丙為方角甲乙丁形丁為方角甲乙戊形戊為方角反之以弦為徑作圓必外切勾股形之方角

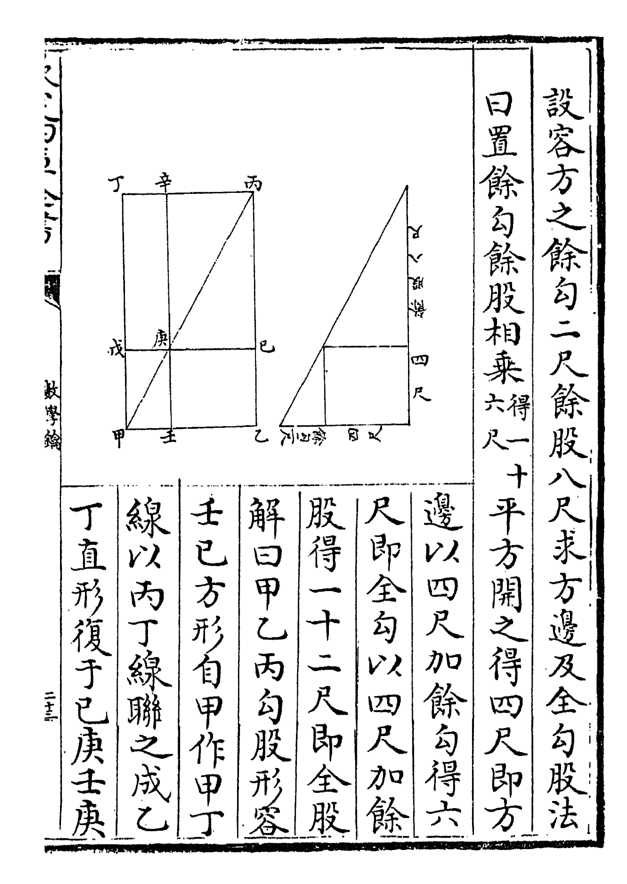
三十則

容方之勾股以餘勾餘股求方邊及全勾全股

兩線引之至戊至辛必分乙丁直形為四形其甲庚庚丙同依甲丙對角線為兩角線形其乙庚庚丁為兩餘形兩餘形之容必相等幾何原本云甲丙對角線必分乙丁全形為丁甲丙乙丙甲相等兩勾股形亦分庚丙角線形為辛庚丙已丙庚相等兩勾股形亦分甲庚角線形為戊甲庚壬庚甲相等兩勾股形試于乙丙甲形内減去已丙庚形于丁甲丙形内減去辛庚丙形乙丙甲丁甲丙兩形既等減去之已丙庚辛庚丙兩形復等則所餘之甲乙庚已甲丁庚辛

設容方之餘勾二尺餘股八尺求方邊及全勾股法

曰置餘勾餘股相乘得一十六尺平方開之得四尺即方邊以四尺加餘勾得六尺即全勾以四尺加餘股得一十二尺即全股



解曰甲乙丙勾股形容壬己方形自甲作甲丁線以丙丁線聯之成乙丁直形復于己庚壬庚

方邊也

三十一則

容方之勾股以餘股及方邊求餘勾

設容方之餘股八尺方邊四尺求餘勾法曰置方邊自乘得一十六尺以餘股除之得二尺即所求

解曰壬巳方形既等于戊辛直形圖同前而直形以餘股為長以餘勾為濶故以餘股除積得餘勾

三十二則

容方之勾股以餘勾及方邊求餘股

兩斜方形必相等再于甲乙庚巳形内減去甲庚壬形于甲丁庚辛形内減去戊甲庚形兩斜方既等減去之甲庚壬戊甲庚兩形復等所餘戊辛直形與壬巳方形安得不等夫甲乙丙勾股形之甲乙勾減去壬巳方形之壬乙邊餘甲壬即餘勾丙乙股減去巳乙邊餘丙巳即餘股辛庚與餘股等戊庚與餘勾等則戊辛直形之容必即餘勾餘股相乘之積而戊辛直形又與壬巳方形等則壬巳方形之容亦必餘勾餘股相乘之積也故置餘勾股相乘平方開之得容

設容方之餘勾二尺方邊四尺求餘股法曰置方邊自乘得一十六尺以餘勾除之得八尺即所求

解同前

三十三則

日晷測高

設物不知高止得物景一十二尺立表八尺表景二尺四寸求物高法曰置物景為實以表高乘之得九十六尺以表景除之得四十尺即所求

解曰物高與物景表高與表景各以日光聯之必皆

成勾股形而體勢等凡兩形體勢等者其比例必等物高與物景

之比例必若表高之與表影也又表影與物景之比例必若表高之與物高也今物景既五倍于表景因知物高亦必五倍于表高矣法以表高乘物景而以表景除之者借表景與物景之比例因表高以求物

高也

三十四則

一表測高

設物不知高距物二十五尺立表十尺又退行五尺立窺表四尺自窺表望之物末與表末相齊成一直線求物高法曰置表距高物二十五尺為實以窺表減表餘六尺乘之得一百五十尺以退行五尺除之得三十尺為表外之高加表高共四十尺即物高

解曰癸丁為物高壬子為表高乙丑為窺表乙丁對

角線為視線戊壬為表距高物之二十五尺壬辛為窺表減表所餘之六尺乙辛為退行之五尺也甲丙一形分為四形其辛巳戊庚為兩角線形其甲壬壬丙為兩餘形兩餘形之容必相等（本卷三十則）法以窺表減表以乘距高物之度必得甲壬餘形之積甲壬

既等于壬丙則甲壬餘形之積亦即壬丙餘形之積矣故以退行五尺除之得庚壬庚壬與丁戊等丁戊則物高于表之度也是以加表得物之全高

三十五則

一表測遠

設物不知遠立表四尺退二尺五寸立窺表四尺五寸自窺表望之物脚與表末相齊成一直線求物遠

法曰置表高為實以退二尺五寸乘之得十尺以表減

窺表餘五寸除之得二十尺即表距遠物之度

觧曰以退二尺五寸乘表高必得辛巳餘形之積然辛巳與戊庚等則辛巳餘形之積亦即戊庚餘形之積矣故以表減窺表所餘之五寸除之得壬戊壬戊與辛甲等辛甲則表距遠物之度也

三十六則

一表測廣

設邑不知廣立窺表于甲甲距邑丁角五百尺立表于壬自甲視邑之丙角與表相齊成一直線次移前表于戊令戊壬與邑平行自甲視邑之丁角亦與表相齊成一直線自甲至戊二尺戊至壬六尺求邑廣

法曰置窺表距丁角五百尺為實以戊至壬六尺乘之得三千尺以甲至戊二尺除之得一千五百尺即邑廣

解曰戊庚辛巳兩餘形既等每加一辛戊角線形成

戊巳戊巳與丁丙等丁丙則邑廣也

甲庚甲巳兩直形兩形之容必亦等何也兩餘形既等所加者復等故也法以戊壬乘甲丁必得甲庚直形之積甲庚直形之積即甲巳直形之積也故以甲戊除之得

三十七則

一表測深

丁 庚 丙

戊 壬 己

甲 辛 乙

表高六尺

壬

二尺

深二十四尺

甲

設井不知深井面闊八尺自井邊退二尺立表六尺自表末視水面甲角與壬邊相齊成一

直線求井邊至水面之深法曰置面濶八尺為實以表高乘之得四十八尺以表至井邊二尺除之得二十四尺即所求

解曰以表高乘井濶即以丙巳乘戊壬所得必戊庚餘形之積戊庚餘形之積即辛巳餘形之積故以表距井邊之壬巳除之得壬辛壬辛即井深也

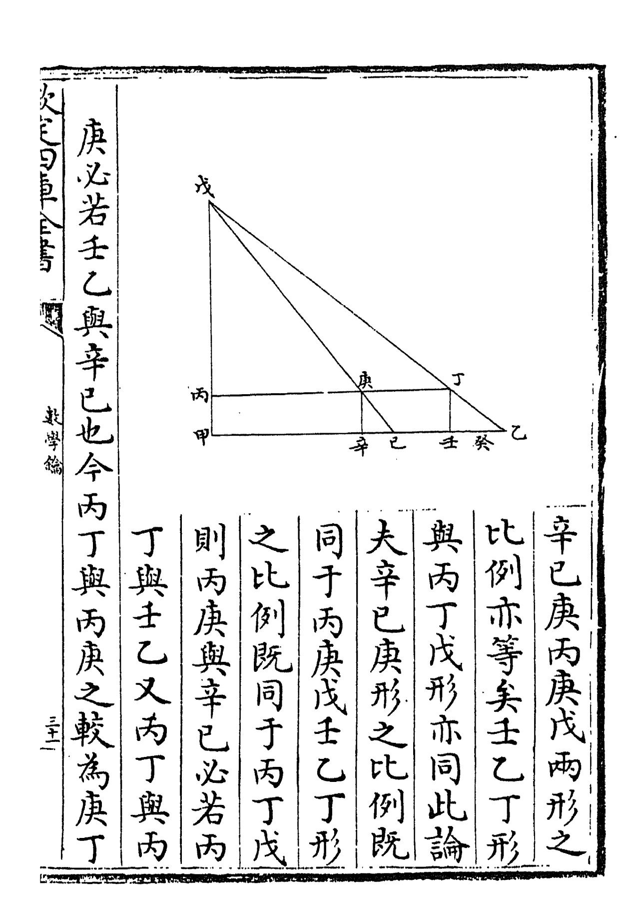
三十八則

重表測高遠

設物不知高及遠立表十尺退行五尺立窺表四尺

自窺表望之物末與表末相齊成一直線自表退行一十五尺復立表十尺又退行八尺復立窺表四尺自窺表望之物末亦與表末相齊成一直線求高及遠法曰置窺表減表餘六尺為實以兩表相距一十五尺乘之得九十尺以前窺表距前表五尺減後窺表距後表八尺餘三尺除之得三十尺即表外之高加表高共四十尺即物高又置前窺表距前表五尺為實以兩表相距一十五尺乘之得七十五尺亦以兩窺表距兩表之度相減餘三尺除之得二十五尺即物遠

解曰自窺表末及表末作丙丁甲乙兩平行線以戊乙戊己兩視線聯之必成六勾股形其丙庚戊形為甲己戊之截形兩形之比例必等辛己庚形亦甲己戊之截形兩形之比例必亦等丙庚戊與辛己庚兩形之比例既皆等于甲己戊是

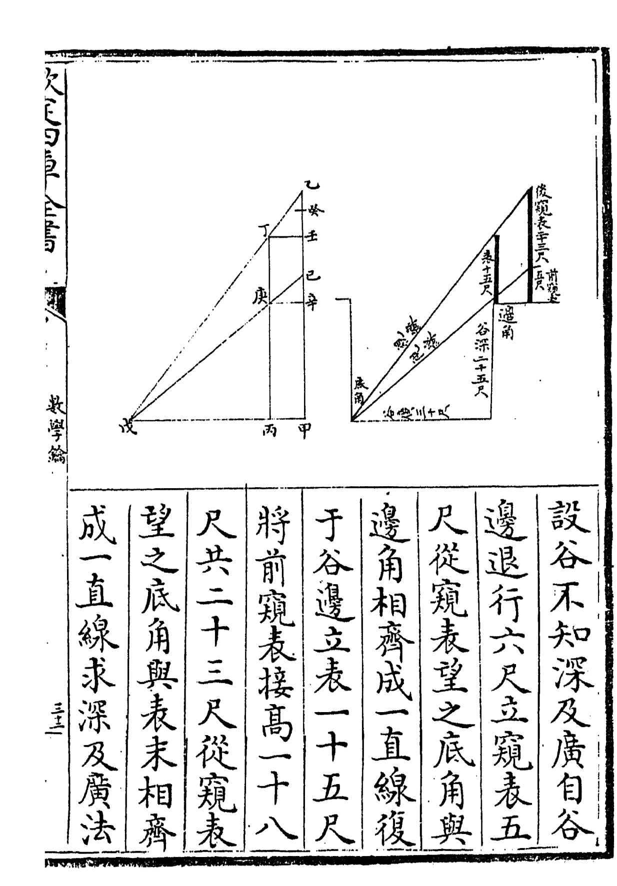


辛已庚丙庚戊兩形之比例亦等矣壬乙丁形與丙丁戊形亦同此論夫辛已庚形之比例既同于丙庚戊壬乙丁形之比例既同于丙丁戊則丙庚與辛已必若丙丁與壬乙又丙丁與丙庚必若壬乙與辛已也今丙丁與丙庚之較為庚丁

壬乙與辛巳之較為癸乙癸乙與庚丁兩較之比例必俱等于相當各線之比例若是則丙庚與辛巳戊丙與辛庚皆若庚丁與癸乙矣法置餘表六尺為實以十五尺乘之三尺除之是借癸乙與庚丁之比例因辛庚以求丙戊也置窺表距表之五尺為實以十五尺乘之三尺除之是借癸乙與庚丁之比例因辛巳以求丙庚也丙戊為表外之高丙庚則物遠也

三十九則

重表測廣深



設谷不知深及廣自谷邊退行六尺立窺表五尺從窺表望之底角與邊角相齊成一直線復于谷邊立表一十五尺將前窺表接高一十八尺共二十三尺從窺表望之底角與表末相齊成一直線求深及廣法

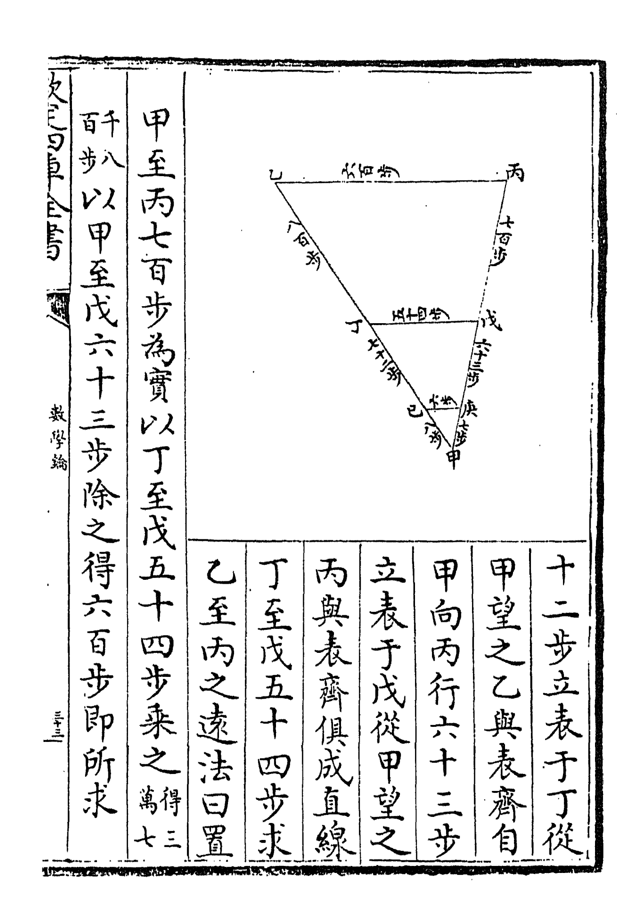
曰置前窺表五尺為實以表高一十五尺乘之得七十五尺以表一十五尺並前窺表五尺共二十尺減後窺表二十三尺餘三尺除之得二十五尺即谷深又置退行六尺為實以表高一十五尺乘之得九十尺亦以三尺除之得三十尺即谷廣

解曰與測高遠同但有縱衡之殊耳

四十則

測遠之遠

設甲至乙八百步甲至丙七百步今自甲向乙行七



十二步立表于丁從甲望之乙與表齊自甲向丙行六十三步立表于戊從甲望之丙與表齊俱成直線丁至戊五十四步求乙至丙之遠法曰置甲至丙七百步為實以丁至戊五十四步乘之（得三萬七千八百步）以甲至戊六十三步除之得六百步即所求

解曰六十三步之與七百步七十二步之與八百步其比例等因知丁戊與乙丙兩線必平行凡三角形以與底平行線分之其分形之比例必等于全形甲丁戊既為甲乙丙之分形而丁戊乙丙又平行則甲戊與戊丁必若甲丙與丙乙也又乙丙與戊丁必若甲丙與甲戊也法置七百步為實以五十四步乘之六十三步除之者借甲戊與丁戊之比例因甲丙以求丙乙也○又截法如甲丙七百步則取七步為庚甲乙八百步則取八步為已已庚六步乙丙必六百

步何也皆百步與乙步之比例也

數學鑰卷六